УДК 621.376

Применение опознания с ЛЧМ-сжатием для проектирования радиоприемных устройств спектрально-разреженных сигналов

Д.Г. Гарш, В.А. Лесников, Н.А. Краев

Вятский государственный университет, lesnikov.vladislav.ru@ieee.org

***Аннотация* — Рассмотрено применение методики опознания со сжатием для построения радиоприемных устройств для поиска сигналов; описана процедура сжатия разреженных сигналов ЛЧМ – последовательностями; приведен пример системы, использующей данную методику.**

***Ключевые слова* — опознание со сжатием, Compressive Sensing, сжатая дискретизация, ЛЧМ-кодирование, Chirp sensing codes.**

I. Опознание со сжатием

A. Задачи опознания со сжатием

Пусть на вход приемной системы подается аналоговый сигнал, который полностью описывается вектором x длиной N. Для представления этого сигнала в цифровой форме в системе производится дискретизация, результатом которой является вектор y длиной M. В процессе приема на сигнал оказывается некоторое воздействие, которое можно описать матрицей A размером $M \times N$. Тогда процесс приема запишется как

$$y = A \cdot x. \qquad (1)$$

В общем случае восстановить исходную информацию о векторе x по вектору y можно, если $M \geq N$. Такое восстановление осуществляется обращением матрицы A: $x = A^{-1} y$.

Однако, благодаря развитию технологии опознания со сжатием (англ. Compressive Sensing [1]), доказано, что при соблюдении определенных условий ([2]) полное восстановление возможно даже при $M < N$.

Если исходный сигнал x содержит только s значимых, ненулевых компонентов, а остальные $N - s$ компонентов равны либо близки к нулю, при этом количество значимых компонентов не больше числа принимаемых, т. е. $s < M$, то путем специальных операций до или в момент дискретизации возможно осуществить аналоговое сжатие исходного сигнала длиной N до выборки размером M.

Требование разреженности во временной области для вектора x может быть заменено требованием разреженности в некотором базисе. Если таким базисом является матрица коэффициентов дискретного преобразования Фурье, то такой сигнал разрежен в частотной области. Опознание со сжатием позволяет произвести дискретизацию таких сигналов на частоте ниже (условие $M < N$), чем того требует теорема отсчетов Котельникова. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$y = A \cdot x = A \cdot \Psi \cdot f = \Phi \cdot f, \qquad (2)$$

где x и f - представления сигнала во временной и частотной областях, Φ - матрица преобразования.

Задачами опознания со сжатием являются [3]:

1) построение такой матрицы Φ, что вся интересующая информация, разреженная в f, перейдет в y;

2) проектирование алгоритма реконструкции, позволяющего по полученным выборкам восстановить интересующую информацию.

B. Случайный и детерминированный подход к построению матрицы Φ

Существуют два подхода к построению Φ.

Первый подход [3] основан на выборе случайной матрицы благодаря свойству случайных матриц с высокой долей вероятности успешного сжатия выходных отсчетов. Достоинством такого выбора является чрезвычайная простота построения систем опознания со сжатием и большая вероятность восстановления. К сожалению, для восстановления сжатой с помощью случайных матриц информации требуется применять алгоритмы оптимизации, которые требуют большого количества вычислительных операций. К подобным методам относятся: Basis Pursuit, Compressive Sampling Matching Pursuit, Orthogonal Matching Pursuit и др. [4].

Другой подход основан на выборе детерминированной матрицы Φ таким образом, чтобы удовлетворять критериям не только сжимаемости сигналов, но и простоты последующего восстановления. Примерами таких методов являются Chirp Sensing Codes, Reed-Muller Codes, Low Density Parity Check Codes и др. [5]

В данной работе используется метод сжатия сигнала с помощью детерминированной матрицы ЛЧМ–последовательностей - Chirp Sensing Codes [6].

II. Методика опознания со сжатием с использованием ЛЧМ – кодов

A. *Построение матрицы измерений*

Для кодирования входной последовательности используются векторы из M отсчетов ЛЧМ-сигнала, которые описываются формулой

$$\nu_{m,r}(t) = \alpha \cdot \exp(j2\pi \cdot t((m-r)+rt)) \quad m, \mathrm{r} \in Z_M, \tag{3}$$

где m - средняя частота ЛЧМ - сигнала, r - шаг изменения частоты ЛЧМ - сигнала, α - масштабирующий коэффициент.

Пусть имеется действительный стационарный сигнал $x(t)$ длиной N:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{s} A_i \cos(2\pi \cdot f_i \cdot t + \varphi_i) \ + \ \varepsilon, \tag{4}$$

где A_i, f_i, φ_i - амплитуда, частота и начальная фаза значимых спектральных компонент, ε - отсчеты белого шума. Спектр этого сигнала содержит только s значимых компонент, а остальные компоненты не превышают уровень шума.

Процедура сжатия состоит из следующих шести шагов:

1) Каждая компонента модулируется ЛЧМ - сигналом с уникальным шагом r_i.

2) Промодулированные спектральные компоненты накладываются друг на друга, образуя сжатый вектор y длиной M, частота сжимаемых компонент в этом векторе определяется величиной m_i.

Матрица измерений Φ будет состоять из N векторов $\nu_{m_i,r_i}(t)$ длиной M. Каждому элементу f_i в этой матрице соответствует уникальный вектор с неповторимой парой (m_i, r_i).

Выражение (2) перепишем следующим образом:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_{m_1,r_1}(1) & \cdots & \nu_{m_i,r_i}(1) & \cdots & \nu_{m_N,r_N}(1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \nu_{m_1,r_1}(M) & & \nu_{m_i,r_{i1}}(M) & & \nu_{m_N,r_N}(M) \end{pmatrix}}_{\Phi} \times \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}}_{f}. \tag{5}$$

В [6] приводится доказательство того, что данная матрица Φ гарантирует восстановление исходного сигнала при заданных параметрах разреженности s и уровня шума ε.

B. *ЛЧМ – кодирование с помощью неэквидистантной дискретизации*

Проще всего рассмотренный метод ЛЧМ - кодирования реализовать с помощью системы неэквидистантной дискретизации[7], представленной на рис. 1.

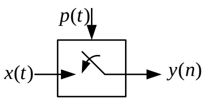

Рис. 1. Система неэквидистантной дискретизации

В подобной системе на вход тактирования дискретизатора подается сигнал

$$p(t) = \cos(2\pi f_s t + \Theta(t)). \tag{6}$$

Частота f_s этого сигнала модулируется специальной функцией $\Theta(t)$. Для реализации ЛЧМ - кодирования необходимо, чтобы $\Theta(t)$ обеспечивала линейное приращение частоты, т.е. $\Theta(t) = 2\pi r_s t^2$. Тактовый сигнал в этом случае будет равен

$$p(t) = \mathrm{Re}(\nu_{f_s,r_s}(t)). \tag{7}$$

Средняя частота f_s выбирается ниже удвоенной частоты Найквиста входного сигнала $x(t)$ и кратной этой частоте:

$$2f_{nyq} / f_s = N / M = k, \ k \in Z_M, \ k > 1. \tag{8}$$

Сигнал $x(t)$ разделится на k зон шириной $f_s/2$, которые в момент дискретизации наложатся друг на друга, образуя сжатый вектор y. При этом четные зоны будут инвертированы.

Восстановление принятой последовательности возможно благодаря тому, что частотные компоненты исходного сигнала f_i в каждой из зон в момент дискретизации модулируются особенной функцией, которая является масштабированной копией исходной функции $\Theta(t)$:

$$\Theta_i(t) = \beta_i \cdot \Theta(t) = 2\pi \beta_i r_s t^2 = 2\pi r_i t^2. \tag{9}$$

Эффект масштабирования появляется за счет того, что частота дискретизации меняется от $f_s - r_s/2$ до $f_s + r_s/2$, а весь последующий анализ сигнала происходит на частоте f_s. Масштаб β_i приращения исходных спектральных компонент f_i будет линейно возрастать с приращением частоты дискретизации:

$$\beta_i = f_i / f_s. \tag{10}$$

Пример дискретизации широкополосного стационарного сигнала x приведен ниже. На рис. 2 показан исходный четырехкомпонентный сигнал, а также спектрограмма дискретизирующего сигнала.

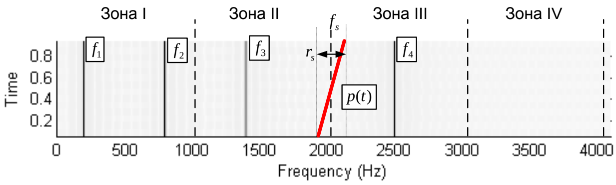

Рис. 2. Спектрограмма $x(t)$ и $p(t)$ ($N = 8192$, $k = 4$, $f_1 = 200\,Гц$, $f_2 = 800\,Гц$, $f_3 = 1400\,Гц$, $f_4 = 2500\,Гц$, $f_s = M = 2048$, $r_s = 80$)

Во время приема происходит наложение четырех зон Найквиста. Если после дискретизации построить спектрограмму принятого сигнала, взяв в качестве базовой частоту f_s, то принимаемые частоты промодулируются ЛЧМ - сигналами с шагом r_i.

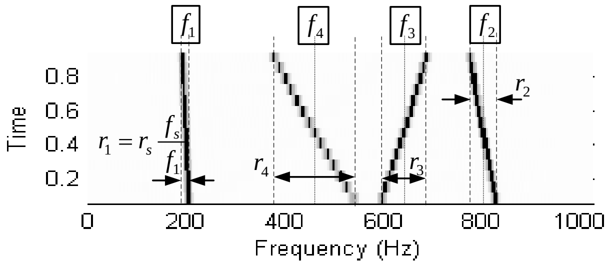

Рис. 3. Спектрограмма сжатого сигнала $y(n)$ (базовая частота $f_s = 2048$)

C. Восстановление

Алгоритм восстановления работает итерационно. За каждый проход вычисляется величина и положение в векторе f самой мощной спектральной составляющей f_i.

3) Нахождение шага r_i компоненты f_i.

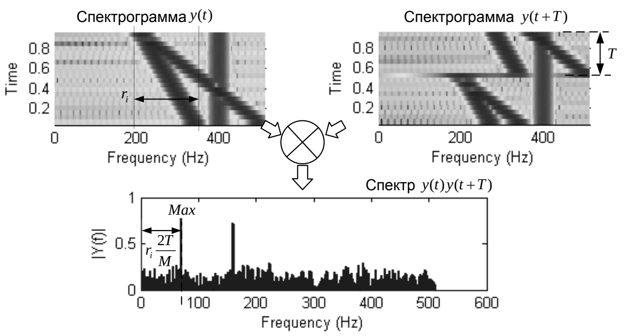

Рис. 4. Графическое представление процесса нахождения $r_i = 70$, при $M = 1024, T = M/2$

Для нахождения r_i используется умножение принятого сигнала на свою комплексно-сопряженную копию, сдвинутую на T отсчетов по времени $y(t)y(t+T)$. В результате такой операции происходит обратная демодуляция ЛЧМ-модулированного сигнала (спектры сдвинутой и исходной последовательности вычитаются). Спектр полученной последовательности $y(t)y(t+T)$ будет содержать максимум на частоте равной $r_i \cdot 2T/M$.

4) Нахождение частоты m_i компоненты f_i.

Если умножить $y(t)$ на комплексно-сопряженный ЛЧМ - сигнал $v_{0,r_i}(t)$ с нулевой центральной частотой и шагом r_i, произойдет демодуляция отсчета f_i. Остальные элементы вектора f распределятся по спектру и их амплитуда будет невелика. Номер максимального элемента в спектре полученной функции будет соответствовать m_i.

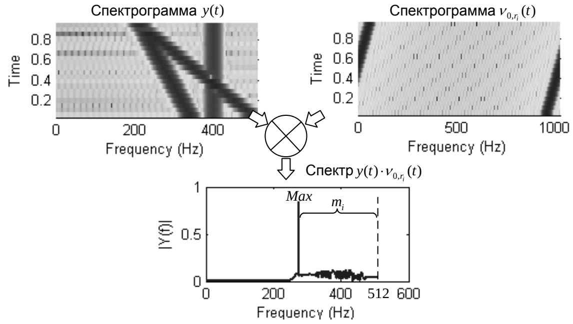

Рис. 5. Определение $m_i = 238$, для сигнала из зоны 2 с частотой $f_i = 750\,Гц$

5) Нахождение частоты и амплитуды f_i.

Зону Найквиста, в которой располагается искомый вектор f_i, можно определить, проанализировав найденный шаг r_i. Положение в этой зоне определяется частотой m_i. Величина вектора f_i будет определяться величиной вектора m_i. При этом надо учитывать, что $|m_i| = \alpha |f_i| + \varepsilon_i$, где α - масштабирующий коэффициент, ε_i - шум, который образуется при наложении k зон друг на друга.

6) Исключение f_i из анализируемого сигнала: $y(t) = y(t) - f_i v_{m_i,r_i}(t)$. Оценка невязки $\|y\|_2^2 > \varepsilon$. Если энергия сигнала $\|y\|_2^2$ превышает заданный уровень шума ε - переход к шагу 1.

Вычислительная сложность метода составляет $O(sM\log(M))$. Это делает его одним из самых быстрых алгоритмов восстановления в системах опознания со сжатием.

D. Увеличение точности восстановления

К сожалению, рассмотренный алгоритм обладает низкой устойчивостью при восстановлении зашумленных сигналов.

Вероятность восстановления можно увеличить, если на шаге 1 определять значение r_i путем выборки и усреднения по нескольким последовательностям $y(t)y(t+T_1), \ldots, y(t)y(t+T_q)$, где $q \in Z_M$. Сложность восстановления в этом случае увеличивается в q раз - $O(qsM\log(M))$.

III. Исследование эффективности алгоритма

Проведены исследования эффективности рассмотренного алгоритма при различных значениях q. Тестовый сигнал содержит однотоновые частотные компоненты, случайно распределенные по спектру. Для оценки эффективности восстановления вычисляется коэффициент восстановления

$$K = s/(s - N_{error}),$$

где N_{error} - число пропущенных или ошибочно восстановленных спектральных компонент.

Успешно восстановленной считается компонента, если её частота соответствует исходной, а амплитуда сходится с допуском $\pm 20\%$. Ниже приведена зависимость коэффициента восстановления от степени разреженности входного сигнала при соотношении сигнал/шум - $20 дБ$.

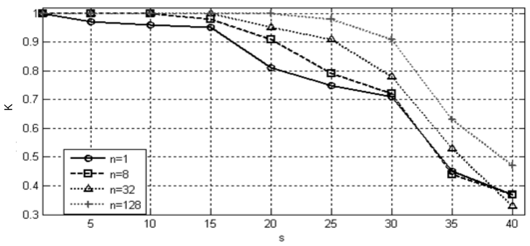

Рис. 6. Зависимость коэффициента восстановления K от числа ненулевых отсчетов ($N = 512$, $M = 128$, $SNR = 20 дБ$)

Результаты исследования влияния шума на эффективность восстановления приведены на рис. 7.

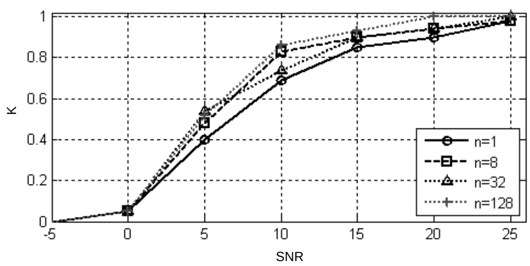

Рис. 7. Зависимость коэффициента восстановления K от уровня шума SNR в дБ для $s = 15$, $N = 512$, $M = 128$

IV. Использование ЛЧМ - кодирования в радиоприемных устройствах прямого преобразования

Одной из сфер применения рассмотренных методов может являться радиотехника. Ниже будет приведен вариант использования ЛЧМ - кодирования для расширения полосы приема в радиоприемных устройствах (РПУ) прямого преобразования.

Структура РПУ приведена на рис. 8. Входной широкополосный сигнал $x(t)$ подается на синфазный и квадратурный каналы, в которых происходит его перенос на нулевую частоту. Частота гетеродина равна f_c. После переноса сигнал проходит через перестраиваемый фильтр нижних частот $H(z)$ и синхронно дискретизируется в АЦП. Для тактирования АЦП используется ЛЧМ - сигнал $p(t)$, средняя частота которого заведомо ниже полосы сигнала, пропускаемого через $H(z)$.

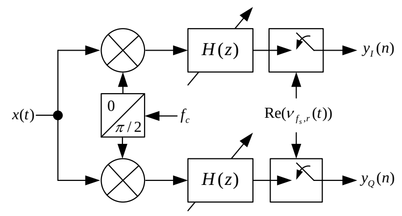

Рис. 8. Структура РПУ прямого преобразования

Перестраиваемый ФНЧ необходим для регулирования ширины полосы сжимаемого сигнала в зависимости от мощности шума и степени разреженности $x(t)$. Реализовать его можно, например, с помощью переключаемых ФНЧ, настроенных на различные полосы приема $f_s/2, f_s, 2f_s$ и т.д.

Сигнал $p(t)$ проще всего сгенерировать с помощью интегрального синтезатора прямого цифрового синтеза, работающего в режиме линейного изменения частоты.

V. Заключение

Результаты, представленные в данной работе, позволяют обеспечить проектирование радиоприемных устройств, обрабатывающих сигналы, распределенные в широкой полосе частот. При этом обеспечивается возможность реализации сложных эффективных алгоритмов за счет выбора частоты дискретизации меньшей, чем того требует теорема отсчетов.

Поддержка

Работы поддержаны грантом УМНИК-1-13-I.

Литература

[1] Donoho D.L. Compressed Sensing // IEEE Transactions on Information Theory. 2006. V. 52(4). P. 1289-1306.

[2] Candès E.J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing // Compte Rendus de l'Academie des Sciences. Serie I. 2008. P. 589-592.

[3] Граничин О.Н, Павленко Д. В. Рандомизация получения данных и L1-оптимизация (опознание со сжатием): Обзор // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11.

[4] Tropp J.A., Wright S.J. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems // Proc. IEEE. 2010. V. 98. № 6. P. 948-958.

[5] Calderbank R., Howard S., Jafarpour S. Construction of a Large Class of Deterministic Sensing Matrices That Satisfy a Statistical Isometry Property // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. 2010. P. 358-374.

[6] Applebaum L., Howard S., Searle S., Calderbank R. Chirp sensing codes: Deterministic compressed sensing measurements for fast recovery // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2009. V. 26(2). P. 283-290.

[7] Fudge G.L., Bland R.E., Chivers M.A., et all. A Nyquist folding analog-to-information receiver // Proc. 42nd Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers. 2008. P. 541–545.